数理解析研究所講究録
第 1769 巻 2011 年 66-69

On Galois extensions of rings with an inner automorphism group

岡山大学・大学院自然科学研究科　池畑　秀一 (Shûichi IKEHATA)
Graduate School of Natural Science and Technology
Okayama University

F.DeMeyer は内部自己同型からなるガロア群をもつ可換環上の中心的ガロア多元環について研究した ([4], [5]). そこで B が内部自己同型からなるガロア群 G をもつ中心 C 上のガロア多元環であれば B が東屋射影的群環 CG_f であることを証明した, ここで $f: G\times G\to U(C)$ は factor set である ([4, Theorem 6]). 逆に任意の東屋射影的群環 CG_f は CG_f の基底によって誘導される内部自己同型からなるガロア群をもつ中心的ガロア多元環であることを示した ([5, Theorem 3]). この結果を内部自己同型群 G をもつ任意のガロア拡大 B/B^G に対して拡張し, 関連するいくつかの結果を述べる.

1. Preliminaries

本論を通して, B は単位元 1 を持つ環とし, C は B の中心,G は B の自己同型写像から成る有限群とし,B^G を G の固定環とする. B が B^G の G-Galois 拡大であるとは B の有限個の元 $\{a_i, b_i\}(i=1,2,...,m)$ が存在して $\sum_{i=1}^{m} a_i g(b_i)=\delta_{1,g}$ $(g\in G)$ が成り立つことである. このような $\{a_i, b_i\}$ は B/B^G の G-Galois システムと呼ばれる.

Galoi 拡大 B/B^G が Galois 多元環であるとは B^G が C に含まれることであり, 中心的 Galois 多元環であるとは $B^G=C$ のとき言う.

A を B の単位元 1 を共有する部分環とする. $V_B(A)$ は A の B における中心化環すなわち,$V_B(A)=\{b\in B | bx=xb$ すべての $x\in A\}$ である. 環の拡大 B/A が分離拡大 (separable extension) であるとは $B\otimes_A B$ から B への B-B-準同型写像 $a\otimes b\to ab$ が分解 (splits) することである. また B/A が平田分離拡大 (Hirata separable extension) であるとは $B\otimes_A B$ が B の有限個の直和の直和因子に B-B-同型であることである. 良く知られているように平田分離拡大は分離拡大である. 平田分離拡大は, 平田和彦が 1968 年に [7] で, 東屋多元環の一般化として初めて導入した概念である. 平田分離拡大はこれまで H-分離拡大と呼ばれてきたが, 最近 G. Szeto と L. Xue が初めて考察した平田和彦にちなんで Hirata separable extension (平田分離拡大) と呼び始めたので, 筆者もそれにならうことにする. これまで使われていた H-分離拡大という呼称は菅野孝三が平田の頭文字 H をとって名付けたものである. 菅野孝三は 2004 年に亡くなるまで一貫して平田分離拡大の研究を続けた. 最近, 作用素環論などの分野で平田分離拡大やそれに類する環拡大が現れ, その重要性が注目されるようになってきた. 中心上分離拡大であるとき東屋多元環と言う. G-Galois 拡大 B/B^G が東屋 Galois 拡大であるとは B^G が東屋 C^G 多元環であるときに言う.([1]) G-Galois 拡大 B/B^G が DeMeyer-Kanzaki Galois 拡大であるとは B が東屋 C 多元環で,C が C^G 上 $G|_C\cong G$ ガロア多元環であるとき言う. B が B^G の平田分離ガロア拡大であるとは B が B^G 上 G ガロア拡大でかつ平田分離拡大であることである.

R を単位元 1 を持つ可換環とし $U(R)$ を R の単数群とする. [4] で与えられたように, $f: G\times G\to U(R)$ が factor set であるとは, すべての g, h, k in G に対して, $f(g,h)f(gh,k)=f(h,k)f(g,hk)$ が成り立つとき言う. $RG_f=\sum_{g\in G} RU_g$ が

R 上の射影的群環であるとは RG_f が R 上自由な基底 $\{U_g \mid g \in G\}$(ここで U_g は各 $g \in G$ に対して可逆元) を持ち, 乗法が全ての $r_g, r_h \in R$ $(g,h \in G)$ に対して $(r_gU_g)(r_hU_h) = r_gr_hU_gU_h$ および $U_gU_h = f(g,h)U_{gh}$ (すなわち, $f(g,h) = U_gU_hU_{gh}^{-1}$) によって与えられるときに言う.

2. Galois Extensions with an Inner Galois Group

B/B^G を G-Galois 拡大で,$|G|$ は B における可逆元で G の元は内部自己同型, すなわち $G = \{g \in G \mid$ 適当な $U_g \in B$ に対して $g(x) = U_gxU_g^{-1}$ $(x \in B)\}$ となっているものとする. このとき B は射影的群環 CG_f を含むことを示す. 中心的ガロア多元環 CG_f に対するいくつかの同値条件も与える. これらの特徴付けは DeMeyer の内部自己同型群による中心的ガロア拡大に対する結果の拡張となっている.

定理 2.1. ([22, Theorem 2.1]) *B/B^G を G-Galois 拡大で,G の元は内部自己同型, すなわち $G = \{g \in G \mid$ 適当な $U_g \in B$ に対して $g(x) = U_gxU_g^{-1}$ $(x \in B)\}$ となっているものとする. このとき B は射影的群環 CG_f を含む. ここで $f: G \times G \to U(C)$ は factor set である.*

Z を G の中心とし $\overline{G}$ を G の CG_f への制限とする. このとき $\overline{G} \cong G/K$ となる. ここで $K = \{g \in Z \mid f(g,h) = f(h,g)$ $(h \in G)\}$. つぎは中心的ガロア多元環 CG_f が内部自己同型からなるガロア群 $\overline{G}$ を持つための必要十分条件を与える.

定理 2.2. ([22, Theorem 2.2]) *B/B^G を G-Galois 拡大でその位数 n が B で可逆で CG_f は定理 2.1. で与えたものとする. このとき CG_f がその中心 S 上の内部自己同型写像からなるガロア群 $\overline{G}$ をもつガロア多元環であるための必要十分条件は $\{U_{\overline{g}} \mid \overline{g} \in \overline{G}\}$ が S 上線形独立であることである. ここで $U_{\overline{g}} = U_g$ $(g \in G)$.*

定理 2.2 は必ずしも可換でない環 R 上の射影的群環 RG_f に対して次のように拡張できる.

定理 2.3. ([21, Theorem 3.2]) *RG_f を環 R 上のガロア射影的群環とし, C を RG_f の, R_0 を R の中心とする. このとき次は同値である:*

(1) $RG_f/(RG_f)^{\overline{G}}$ は $\{U_g \mid g \in G\}$ によって誘導された内部自己同型からなる $\overline{G}$ をガロア群とするガロア拡大である.

(2) $C\overline{G}_{\overline{f}}$ は C 上 $\overline{G}$ の中心的ガロア射影的群環となる. ここで $\overline{f}: \overline{G} \times \overline{G} \to U(C)$ は $f: G \times G \to U(R_0)$ により誘導された factor set である.

(3) $\{U_{\overline{g}} \mid \overline{g} \in \overline{G}\}$ は RC 上自由で, $RC = \oplus \sum_{g \in K} RU_g$ ここで $U_{\overline{g}} = U_g$ が各 $g \in G$ について成り立ち $K = \{g \in Z(G) \mid f(g,g') = f(g',g)$ $(g' \in G)\}$.

定理 2.2. により次が得られる. ここで C は B の中心,S は CG_f の中心,Z は G の中心, さらに $K = \{g \in Z \mid f(g,h) = f(h,g)$ $(h \in G)\}$ であることを思い出しておこう.

定理 2.4. ([22, Theorem 2.3]) B/B^G を G-*Galois* 拡大で,G の元は内部自己同型からなるものとし, その位数 n は可逆であるとする. このとき次は同値である:

(1) $B = \sum_{g \in G} B^G U_g$, すなわち, B は B^G 上 $\{U_g \,|\, g \in G\}$ によって生成されている.

(2) $B = B^G G_f$ は B^G 上 G の射影的群環である. ここで $f : G \times G \to U(C)$ は *factor set* である.

(3) $C = S$.

(4) C 上 $\{U_g \,|\, g \in G\}$ で生成される B の部分環 $\sum_{g \in G} CU_g$ は中心的ガロア C 多元環でガロア群は $\overline{G} \cong G$ となる.

(5) $\sum_{g \in G} CU_g$ は東屋 C 多元環である.

(6) $K = \langle 1 \rangle$ で $\{U_{\overline{g}} \,|\, \overline{g} \in \overline{G}\}$ は S 上線形独立である.

3. A composition of Galois extensions

この節では,B/B^G を G-Galois 拡大で,G の元は内部自己同型からなるものとし, その位数 n は可逆であるとし,C を B の中心, $K = \{\, g \in G \,|\, g(U_i) = U_i \; i = 1, 2, \cdots, n\}$ とすれば K は G の可換な正規部分群となる. このとき次がなりたつ.

定理 3.1. ([23, Theorem 2.2]) B/B^G を G-*Galois* 拡大で,G の元は内部自己同型からなるものとし, その位数 n は可逆であるとする. このとき B は 2 つのガロア拡大を積み重ねたものになっている.

(1) B/B^K は可換な内部自己同型群 K に対して K-*Galois* 拡大である.

(2) B^K/B^G は内部自己同型からなるガロア群 G/K に対して G/K-*Galois* 拡大である.

最後に関連した結果として次の定理をあげる. これは [18, Theorem 2.11] の拡張となっている.

定理 3.2. B を可換環とし,ρ を B の自己同型写像で位数が n とし,$G =< \rho >$, $A = B^G$, さらに n は B で可逆であるとする. B/A は G-*Galois* 拡大で, A は 1 の原始 n 乗根 ζ を含み, すべての $1 \leqq i \leqq n-1$ に対して, $1 - \zeta^i$ は A で可逆とする. このとき任意の $u \in U(A)$ に対して, $B_u = B[X;\rho]/(X^m - u)B[X;\rho] = B[x;\rho]$, $x = X + (X^m - u)B[X;\rho]$ は東屋 A 多元環である. さらに

$$\tilde{\rho} : B_u \to B_u, \;\; \tilde{\rho}(\sum_{i=0}^{n-1} x^i b_i) = \sum_{i=0}^{n-1} x^i \rho(b_i)$$

$$\sigma : B_u \to B_u, \;\; \sigma(\sum_{i=0}^{n-1} x^i b_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \zeta^i x^i b_i$$

とおけば, σ も $\tilde{\rho}$ もともに位数 n の同型写像で $\sigma\tilde{\rho} = \tilde{\rho}\sigma$ となり, B_u/A は中心的 *Abelian*$< \sigma > \times < \tilde{\rho} >$-*Galios* 拡大である.

REFERENCES

[1] R. Alfaro and G. Szeto, Skew Group Rings which are Azumaya, *Comm. in Algebra,* **23** (6) (1995), 2255–2261.

[2] M. Auslander and O.Goldman, The Brauer Group of a Commutative Ring, *Trans. Amer. Math. Soc.,* **97** (3) (1960), 367-409.

[3] S. U. Chase, D. K. Harrison and A. Rosenberg, Galois theory and Galois cohomology of commutative ring, *Mem. Amer. Math. Soc.,* **52** 1965, 15–33.

[4] F. DeMeyer, Some notes on the general Galois theory of rings, *Osaka J. Math.,* **2** 1965, 117–127.

[5] F. DeMeyer, Galois theory in separable algebras over a commutative ring, *Illinois J. Math.,* **10** 1966, 278–295.

[6] F. DeMeyer and F. Ingraham, Separable algebras over a commutative ring, *Lecture Notes in Math.,* **181** 1971, Springer, Berlin

[7] K. Hirata, Some types of separable extensions of rings, *Nagoya Math. J.,* **33** 1968, 107–115.

[8] K. Hirata, Separable extensions and centralizers of rings, *Nagoya Math. J.,* **35** 1969, 31–45.

[9] K. Hirata and K. Sugano, On semisimple extensions and separable extensions overnon commutative rings, *J. Math. Soc. Japan,* **18** 1966, no. 2, 360–373.

[10] S. Ikehata, On separable polynomials and Frobenius polynomials in skew polynomial rings, *Math. J. Okayama Univ.,* **22** 1980, 115–129.

[11] S. Ikehata, Azumaya algebras and skew polynomial rings, *Math, J. Okayama Univ.,* **23** 1981, 19–32.

[12] S. Ikehata, A note on separable polynomials in skew polynomial rings of derivation type, *Math. J. Okayama Univ.,* **22** 1980, 59–60.

[13] S. Ikehata, On H-separable polynomials of prime degree, *Math. J. Okayama Univ.,* **33** 1991, 21–26.

[14] S. Ikehata and G. Szeto, On H-separable polynomials in skew polynomial rings of automorphism type, *Math. J. Okayama Univ.,* **34** 1992, 49–55.

[15] S. Ikehata and G. Szeto, On H-skew polynomial rings and Galois extensions, *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.,* **159** Mercel Dekker, Inc., 1994, 113–121.

[16] S. Ikehata, G. Szeto and L. Xue, On Galois extensions with an inner Galois group and a Galois commutator subring, *Proceedings of the 42nd Symposium on Ring Theory and Representation Theory,* 2010, 23–32.

[17] T. Kanzaki, On Galois algebra over a commutative ring, *Osaka J. Math.,* **2** 1965, 309-317.

[18] Nuss, Philippe, Galois-Azumaya extensions and the Brauer-Galois group of a commutative ring, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin,* **13** 2006, no. 2, 247–270.

[19] G. Szeto and L. Xue, The Structure of Galois Algebras, *J. Algebra* **237**(1) 2001, 238-246.

[20] G. Szeto and L. Xue, The Galois Algebra with Galois Group which is the Automorphism Group, *J. Algebra* **293**(1) 2005, 312-318.

[21] G. Szeto and L. Xue, On Projective Group Rings with an Inner Automorphism Group, *Far East J. Math. Sci.,* **31**(1) 2008, 1-8.

[22] G. Szeto and L. Xue, On Galois Extensions with an Inner Galois Group, *Recent Developments in Algebra and Related Area, ALM 8,* , 2008, 239-245.

[23] G. Szeto and L. Xue, A structure of Galois extensions with an inner Galois group, *Int. J. Algebra,* **5** (5) 2011, 233–239.

E-mail address: `ikehata@ems.okayama-u.ac.jp`